А. А. Кытманов

Сибирский федеральный университет,

aakytm@gmail.com

ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ИЗ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему функций $f_1(z)$, $f_2(z), \dots, f_n(z)$, аналитических в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих вид

$$f_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + {} + \beta_2^j + \dots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно:

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} a_\alpha^j z^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}$ В дальнейшем будем считать, что степени всех мономов (пс совокупности переменных), входящих в Q_j, строго больше, чем k_j, $j = 1, 2, \dots, n$ $(\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > k_j)$.

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

При достаточно малых r_j определены интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^\delta} \cdot \frac{df}{f} = \int\limits_{\gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\delta_1} \cdot z_2^{\delta_2} \cdots z_n^{\delta_n}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\delta_j \in \mathbb{Z}$. По теореме Коши – Пуанкаре эти интегралы не зависят от $(r_1, \dots, r_n)$. Обозначим

$$\sigma_\delta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^\delta} \cdot \frac{df}{f}.$$

В работе [1] были получены аналоги рекуррентных формул Ньютона для систем уравнений (1).

Предложение. *Для системы уравнений*

$$f_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где функции $f_j(z)$ определены равенствами (1), *справедливы следующие рекуррентные формулы Ньютона:*

$$\sigma_{\delta-\beta^1-\dots-\beta^n} + \sum_{k_1+\dots+k_n<\|\alpha^1+\dots+\alpha^n\|<\|\delta\|} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^n} +$$

$$+ \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^n} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} (\Delta_\beta - \Delta_{\alpha^1 \dots \alpha^n}) = 0.$$

В работе [2] был описан один из классов систем, для которых интегралы σ_δ совпадали со степенными суммами корней вида

$$\widehat{\sigma}_\delta = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z^{\delta_1}_{1(l)} \cdot z^{\delta_2}_{2(l)} \cdots z^{\delta_n}_{n(l)}},$$

где ε_l равен 1 или -1 в зависимости от вида системы. Для таких систем приведенный результат позволяет производить исключение неизвестных. Под исключением неизвестных мы будем понимать построение функции, называемой результантом, корни которой тесно связаны с координатами корней системы уравнений. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_1 + e^{z_2} - 1 - z_2 = 0, \\ z_2 + e^{z_1} - 1 - z_1 = 0 \end{cases}$$

и вычислим для нее интегралы σ_δ с $\|\delta\| \leqslant 4$, пользуясь разложением $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots$ в окрестности нуля. Получим

$$\sigma_{(-1,-1)} = 0, \quad \sigma_{(0,-1)} = \sigma_{(-1,0)} = 0,$$

$$\sigma_{(1,-1)} = \sigma_{(0,0)} = \sigma_{(-1,1)} = 0,$$

$$\sigma_{(2,-1)} = \sigma_{(-1,2)} = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_{(1,0)} = \sigma_{(0,1)} = 0,$$

$$\sigma_{(3,-1)} = \sigma_{(-1,3)} = -\frac{1}{6}, \quad \sigma_{(2,0)} = \sigma_{(0,2)} = 0, \quad \sigma_{(1,1)} = -\frac{5}{4},$$

$$\sigma_{(4,-1)} = \sigma_{(-1,4)} = \sigma_{(3,0)} = \sigma_{(0,3)} = 0,$$

$$\sigma_{(2,1)} = \sigma_{(1,2)} = -\frac{7}{12}, \quad \sigma_{(5,-1)} = \sigma_{(-1,5)} = \frac{1}{4},$$

$$\sigma_{(4,0)} = \sigma_{(0,4)} = \sigma_{(3,1)} = \sigma_{(1,3)} = 0, \quad \sigma_{(2,2)} = \frac{2}{9}.$$

Для $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, где $\delta_j > 0$, $j = 1, 2$, интегралы σ_δ совпадают со степенными суммами $\widehat{\sigma}_\delta$.

Теперь, взяв, например, $S_1 = \sigma_{(1,1)} = -5/4$ и $S_2 = \sigma_{(2,2)} = 2/9$ и воспользовавшись классическими рекуррентными формулами Ньютона

$$\begin{cases} b_1 + S_1 = 0, \\ 2b_2 + S_1 b_1 + S_2 = 0, \end{cases}$$

найдем первые коэффициенты результанта данной системы относительно величин $w = 1/(z_1 z_2)$. Таким образом, получим, что указанный результант представляется в виде

$$1 + \frac{5}{4}w + \frac{193}{288}w^2 + \cdots .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кытманов А. А. *Об аналогах рекуррентных формул Ньютона* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 10. – С. 40-50.

2. Кытманов А. М., Потапова З. Е. *Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций* // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 8 (519). – С. 39-48.

А. В. Лаврентьев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, AlexDoberman@list.ru

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВА С НУЛЬ-КОМПОНЕНТОЙ МАЛОГО РАНГА

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли четной характеристики представляет интерес описание транзитивных 1-градуированных алгебр Ли $L = \oplus_{i>=-1} L_i$ с классической редуктивной компонентой L_0. В случае $p > 2$ такое описание получено в [2]. В работе рассматривается случай, когда L_0 — классическая алгебра Ли типа B_2 и G_2. Через $V(\lambda)$ обозначается неприводимый ограниченный L_0-модуль со старшим весом λ, λ_1, λ_2 — фундаментальные веса алгебры L_0. При $p = 2$ неприводимые p-представления алгебры L_0 могут соответствовать старшим весам λ_1, λ_2, $\lambda_1 + \lambda_2$ (см. [2]). Определения и обозначения, связанные с алгебрами картановского типа, см. в [1]. Определения решеток $L_Z^{\lambda_1}$, $L_Z^{\lambda_2}$, $L_Z^{\lambda_1+\lambda_2}$ см. в [3].

Строение 1-градуированных алгебр Ли с компонентой $L_0 = B_2$ и неприводимым ограниченным L_0-модулем $L_{-1} = V(\lambda)$ описывается в теореме 1.